0-12 Lineare Gleichungssysteme

Aufgaben

Die folgenden Aufgaben sind in Blöcke aufgeteilt. Innerhalb eines Blockes (I bis VII) werden die Aufgaben mit zunehmender Aufgabennummer schwieriger. Sie sollten auch in der Lage sein, die schwierigen Aufgaben eines Blockes zu bearbeiten. Beginnen Sie in jedem Block zuerst mit der **grün herorgehobenen** Aufgabe. Nur wenn Sie diese nicht bearbeiten können, fangen Sie mit der ersten Aufgabe des betreffenden Blockes an. **Rotbraun hervorgehobene** Aufgaben sind besonders „sportlich" und müssen nicht unbedingt bearbeitet werden. Auf der 4. Seite dieses Dokuments finden Sie die Lösungen zu den Aufgaben. Fachliche Hilfe zum Rechnen mit Brüchen finden Sie auf Seite 3.

I

[Lineare Gleichungssysteme **ohne** Parameter und mit **zwei** Unbekannten] **Lösen Sie folgende linearen Gleichungssysteme nach x und y auf:**

01) I $1+x=2$
II $x+y=3$

02) I $x+y=2$
II $-x+y=-2$

03) I $3x-2y=-4$
II $2x-3y=4$

04) I $x+y=3$
II $y-x=1$

05) I $3+4x=5y$
II $4x-2=2y$

06) I $3+4x=-x+5y$
II $-2+4x=2x$

07) I $3+5x=5(y-1)$
II $3(-2+x)=2y$

08) I $5x+3x=y-1$
II $3(y-2)=2y$

09) I $x^2+2y=3$
II $4x^2+2y=6$

Bearbeiten Sie Aufgaben 10 bis 12 mit Methode 4 („Graphische" Methode)

10) I $3x+2y=2$
II $-2x+3y=6$

11) I $3x+2y=-5$
II $6x+4y=-30$

12) I $3x-2y=-10$
II $6x-4y=-20$

II

[Lineare Gleichungssysteme **ohne** Parameter und mit **drei** Unbekannten] **Lösen Sie folgende linearen Gleichungssysteme nach x, y und z auf:**

13) I $x=1$
II $x+y=2$
III $x+y+z=3$

14) I $x+y=2$
II $x+z=4$
III $y+z=8$

15) I $x+\frac{y}{2}=\frac{2}{3}$
II $\frac{x}{4}+2z=\frac{1}{2}$
III $y+\frac{z}{2}=8$

16) I $3x-2y+7z=2$
II $4x-2y+2z=1$
III $y+4z=2$

17) I $3x+2y+2z=4$
II $4x-2y+2(-1+z)=y$
III $y+4z=2(x+z)$

III

[Lineare Gleichungssysteme **mit** Parametern und mit **zwei** Unbekannten] **Lösen Sie folgende linearen Gleichungssysteme nach x und y auf:**

18) I $ax-3y=4$
II $4x-y=2$

19) I $ax+2y=4$
II $4x-by=2$

20) I $ax-7y=4a$
II $ax-y=2$

21) I $ax-by=4$
II $ax+3by=2$

22) I $ax-by=c$
II $ax+3by=2c$

23) I $a_1x+b_1y=c_1$
II $a_2x+b_2y=c_2$

IV

[Lineare Gleichungssysteme **mit** Parametern und mit **drei** Unbekannten] **Lösen Sie folgende linearen Gleichungssysteme nach x, y und z auf:**

24) I $ax-2y=1$
II $ax+2y+2z=3$
III $ax-by+cz=2$

25) I $ax+2y-3z=1$
II $ax-by+2z=3$
III $ax-by+cz=2$

26) I $ax+by+2z=4$
II $4x-by+cz=2$
III $ax-2y+cz=2$

V

[Lineare Gleichungssysteme mit vier oder mehr Unbekannten] **Lösen Sie folgende linearen Gleichungssysteme nach u, v, w, x, y und z auf.**

25)
I $2u = 1$
II $2u + 2v = 2$
III $2u + 2v - 3w = 3$
IV $2u + 2v - 3w - 7x = 4$

26)
I $2u = 1$
II $u + 3v = 32$
III $2u + 2v - 3w - 5x = 3$
IV $2u + 2v + 3w - 7x = 4$

27)
I $2u = 1$
II $2u - 3v = 2$
III $2v - 3w = 3$
IV $3w - 7x = 4$
V $4x + 2y = 4$

28)
I $2u = 1$
II $3u - 3v = 2$
III $3u - 4v + w = -2$
IV $3u + 2v - w + 4x = 2$
V $u + 2v - 3w + 2x - y = -4$
VI $2u - 2v - 2w + 2x + 2y - z = -4$

VI

[Steckbriefaufgaben für Geraden und Parabeln] **Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen zu den im Folgenden beschriebenen Graphen mit Hilfe linearer Gleichungssysteme:**

29) Der Graph einer linearen Funktion f verläuft durch die Punkte P(3|3) und Q(6|2). Berechnen Sie mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems die Geradengleichung f(x). Verwenden Sie als Ansatz die Geradengleichung in ihrer Hauptform [f(x) = m x + t].

30) Der Graph einer quadratischen Funktion g verläuft durch die Punkte P(-2|3), Q(1|7) und S(5|-1). Berechnen Sie mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems die Parabelgleichung g(x). Verwenden Sie als Ansatz die quadratische Gleichung in ihrer Hauptform [$g(x) = a\,x^2 + b\,x + c$].

31) Der Graph einer quadratischen Funktion h verläuft durch den Punkt P(1|5) und den Scheitelpunkt S(7|3). Berechnen Sie mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems die Parabelgleichung h(x). Verwenden Sie als Ansatz die quadratische Gleichung in ihrer Hauptform [$h(x) = a\,x^2 + b\,x + c$].

VII

[Textaufgaben] **Lösen Sie folgende Textaufgaben. Erstellen Sie dazu die entsprechenden linearen Gleichungssysteme und lösen Sie diese:**

32) Hans züchtet Hasen und Hühner. Als er die Köpfe zählt, kommt er auf die Anzahl von 8. Als er die Pfoten und Füße zählt, kommt er auf die Anzahl von 28. Berechnen Sie, wieviele Hasen und wieviele Hühner Hans besitzt.

33) Uschi ist heute 21 Jahre älter als ihr Sohn. In 6 Jahren wird er ein Fünftel des Alters seiner Mutter erreicht haben. Wo ist gerade der Vater?

34) Jane kauft 10 Brötchen, 2 Croissants und 3 Stück Kuchen. Für alles zusammen zahlt sie 11 Euro. Otto kauft 5 Brötchen, 4 Croissants und 2 Kuchen für einen Gesamtbetrag von 9,50 Euro. Hans kauft 1 Brötchen, 2 Crossants und 3 Kuchen. Dafür muss er 8 Euro und 30 Eurocent zahlen. Berechnen Sie die Einzelpreise für ein Brötchen, ein Croissant und einen Kuchen.

35) Die fehlenden Zahlen in den Felder des rechts abgebildeten Quadrates müssen so berechnet werden, dass sich für alle Zeilen und Spalten jeweils die Summe 68 ergibt.

8	30		2
	12		
18	20		5
		14	26

Abbildung zu Aufgabe 35

Hinweise

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Allgemeines LGS	Dreieckiges LGS	Diagonales LGS	
$a_I\,x + b_I\,y + c_I\,z = d_I$	$a_I\,x + b_I\,y + c_I\,z = d_I$	$a_I\,x = d_I$	x, y, z: unbekannte **Variable**
$a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z = d_2$	$b_2\,y + c_2\,z = d_2$	$b_2\,y = d_2$	a_I, a_2, b_I, b_2,
$a_3\,x + b_3\,y + c_3\,z = d_3$	$c_3\,z = d_3$	$c_I\,z = d_3$	c_I, c_2, d_I, d_2 : **Koeffizienten**
Allgemeines LGS	**Dreieckiges** LGS	**Diagonales** LGS	

Lösen linearer Gleichungssysteme – Methoden

Methode 1 – Einsetzungsmethode

$x + 3y = 11$	(I)		x aus (I) ausrechnen	Eine der beiden Gleichungen (hier: I) wird nach einer Variablen x aufgelöst. Die Lösung wird in die andere Gleichung (hier: II) eingesetzt →
$4x - 2y = 2$	(II)		und	
$\mathbf{x = 11 - 3y}$	(I')	in (II)	in (II) einsetzen →	
$4(\mathbf{11 - 3y}) - 2y = 2$	(II')		(II')	Auflösung von (II) nach y →
$44 - 14y = 2$			(II') nach y auflösen →	
$14y = 42$				
$\mathbf{y = 3}$		in (I)	Lösung für y	**Lösung für y**
$x + 3 \cdot \mathbf{3} = 11$			$\mathbf{y = 3}$ in (I) einsetzen →	Die Lösung für y wird in (I) →
$\mathbf{x = 2}$			$\mathbf{x = 2}$	**Lösung für x**

Methode 2 – Additionsmethode

$4x + 3y = 22$	(I)		
$4x - 3y = 10$	(II)	(I) − (II)	
● $(4x + 3y) - (4x - 3y) = 22 - 10$			
$6y = 12$			
$\mathbf{y = 2}$		(I) + (II)	
● $(4x + 3y) + (4x - 3y) = 22 + 10$			
$8x = 32$			
$\mathbf{x = 4}$			

Hier ● bietet sich die **Additionsmethode** an, da die Koeffizienten von x in beiden Gleichungen gleich groß (4) sind.

Hier ● bietet sich die **Subtraktionsmethode** an, da die Koeffizienten von y in beiden Gleichungen bis auf das **Vorzeichen** gleich groß (±3) sind.

Beide Gleichungen besitzen für die gleiche Variable (x **oder** y) **betragsgleiche** Koeffizienten. Beide Gleichungen werden voneinander **subtrahiert** (Koeffizienten mit **gleichen** Vorzeichen) oder aufeinander **addiert** (Koeffizienten mit **un**gleichen Vorzeichen).

Methode 3 – Gleichsetzungsmethode

$\mathbf{2x + 2y = 18}$	(I)	
$\mathbf{2x + 3y = 22}$	(II)	→
$\mathbf{2x + 2y = 22 - y}$	(II')	
$\mathbf{18 = 22 - y}$	(III)	(I)=(II')
$\mathbf{y = 4}$		in (I)
$\mathbf{2x + 8 = 18}$		→
$\mathbf{x = 5}$		

	Linke Seite	Rechte Seite
(I)	$\mathbf{2x + 2y}$	$\mathbf{18}$
(II)	$\mathbf{2x + 3y}$	$\mathbf{22}$
(II')	$\mathbf{2x + 2y}$	$\mathbf{22 - y}$
→ (III)	$\mathbf{18}$	$\mathbf{22 - y}$

Nur y als Variable ↑

→ $\mathbf{y = 4}$

→ $\mathbf{x = 5}$

Eine der Gleichungen (oder beide) so umformen, dass beide Gleichungen links den gleichen Term besitzen und in beiden Gleichungen rechts nur eine Variable (x **oder** y) auftritt. Durch Gleichsetzen der Gleichungen erhält man eine Gleichung mit einer Unbekannten.

Methode 4 – „Graphische" Methode

$\mathbf{-2x + 2y = 18}$	(I)
$\mathbf{2x + 3y = 12}$	(II)
$f_I(x) = \mathbf{y = x + 9}$	(I')
$f_2(x) = \mathbf{y = -\frac{2x}{3} + 4}$	(II')

$\mathbf{f_I(x) = f_2(x)}$

$\mathbf{9 + x} = -\frac{2x}{3} + 4$

$\left.\begin{array}{l} \mathbf{x = -3} \\ \mathbf{y = 6} \end{array}\right\}$ S(-3|6): Schnittpunkt

$\mathbf{f_I(x)}$ und $\mathbf{f_2(x)}$ in x-y-Diagramm darstellen → **Schnittpunkt S**

Abb →

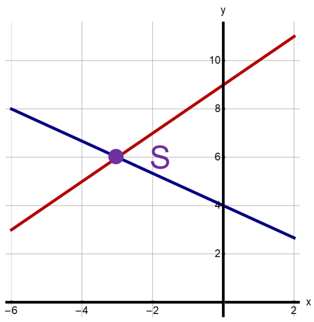
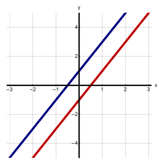


Abb. →

$G_{f_I} \parallel G_{f_2}$: **keine** Lösung

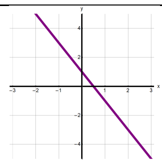


← Abb.

G_{f_I} und G_{f_2} haben einen Schnittpunkt: **Eine** Lösung

Abb. →

$G_{f_I} = G_{f_2}$: **Unendlich viele** Lösungen



Lösungen

I

1) $x = 1 \mid y = 2$	**02)** $x = 2 \mid y = 0$	**03)** $x = -4 \mid y = -4$
04) $x = 1 \mid y \to 2$	**05)** $x = \frac{4}{3} \mid y \to \frac{5}{3}$	**06)** $x = 1 \mid y = \frac{8}{5}$
07) $x = \frac{46}{5} \mid y = \frac{54}{5}$	**08)** $x = \frac{5}{8} \mid y = 6$	**09)** $x_1 = -1 \mid y_1 = 1$; $x_2 = 1 \mid y_2 = 1$

10) I $f_I(x) = 1 - \frac{3x}{2}$

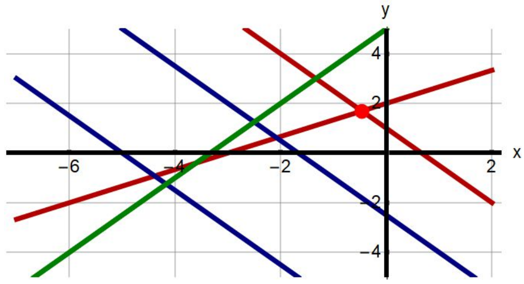
II $f_{II}(x) = 2 + \frac{2x}{3}$

11) I $g_I(x) = -\frac{5}{2} - \frac{3x}{2}$

II $g_{II}(x) = -\frac{15}{2} - \frac{3x}{2}$

12) I $h_I(x) = 5 + \frac{3x}{2}$

II $h_{II}(x) = 5 + \frac{3x}{2}$



$x = -\frac{6}{13} \mid y = \frac{22}{13}$

$x, y \in \{\ \}$

$G_{g_I} \parallel G_{g_{II}} \to$ keine gemeinsamen Punkte

$x, \in \{\ \} \mid y = 5 + \frac{3x}{2}$

$G_{h_I} = G_{h_{II}} \to$ unendlich viele gemeinsamen Punkte

II

13) $x = 1 \mid y = 1 \mid z = 1$	**14)** $x = -1 \mid y = 3 \mid z = 5$	**15)** $x = -\frac{314}{99} \mid y = \frac{760}{99} \mid z = \frac{64}{99}$
16) $x = \frac{1}{2} \mid y = \frac{4}{5} \mid z = \frac{3}{10}$	**17)** $x = \frac{9}{13} \mid y = \frac{7}{13} \mid z = \frac{11}{26}$	

III

18) $x = -\frac{2}{-12+a}$; $y = -\frac{2(-8+a)}{-12+a}$	**19)** $x = \frac{4(1+b)}{8+ab}$; $y = -\frac{2(-8+a)}{8+ab}$	**20)** $x = -\frac{-7+2a}{3a}$; $y = \frac{1}{3}(1-2a)$
21) $x = \frac{7}{2a}$; $y = -\frac{1}{2b}$	**22)** $x = \frac{5c}{4a}$; $y = \frac{c}{4b}$	**23)** $x = -\frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2}$; $y = -\frac{-a_2 c_1 + a_1 c_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2}$

IV

24) $x = -\frac{4-b-4c}{a(-2+b+2c)}$; $y = -\frac{1-c}{-2+b+2c}$; $z = \frac{b}{-2+b+2c}$	**25)** $x = -\frac{8+5b-6c-bc}{a(2+b)(-2+c)}$; $y = -\frac{1+2c}{(2+b)(-2+c)}$; $z = -\frac{1}{-2+c}$	**26)** $x = -\frac{2(2-b-2c+bc)}{-8+ab+ac-2bc}$; $y = -\frac{2(4-a-4c+ac)}{8-ab-ac+2bc}$; $z = -\frac{2(-8+a-2b+ab)}{8-ab-ac+2bc}$

V

25) $u = \frac{1}{2}$ $v = \frac{1}{2}$ $w = -\frac{1}{3}$ $x = -\frac{1}{7}$	**26)** $u = \frac{1}{2}$ $v = \frac{21}{2}$ $w = \frac{43}{36}$ $x = \frac{37}{12}$
27) $u = \frac{1}{2}$ $v = -\frac{1}{3}$ $w = -\frac{11}{9}$; $x = -\frac{23}{21}$ $y = \frac{88}{21}$	**28)** $u = \frac{1}{2}$ $v = -\frac{1}{6}$ $w = -\frac{25}{6}$; $x = -\frac{5}{6}$ $y = 15$ $z = 42$

VI

29) f(x)= $m\,x + t$

$f(3) = 3 \quad \to \; 3\,m + t = 3$

$f(6) = 2 \quad \to \; 6\,m + t = 2$

$m \to -\frac{1}{3} \qquad t \to 4$

$\mathbf{f(x)} = -\frac{1}{3}\,x + 4$

30) $g(x) = a\,x^2 + b\,x + c$

$g(-2) = 34 \to a - 2b + c = 3$

$g(\ 1) = 7 \to a + b + c = 7$

$g(\ 5) = -1 \to 25a + 5b + c = -1$

$a = -\frac{10}{21} \qquad b = \frac{6}{7} \qquad c = \frac{139}{21}$

$\boldsymbol{g(x) = -\frac{10}{21}\,x^2 + \frac{6}{7}\,x + \frac{139}{21}}$

31) $h(x) = a\,x^2 + b\,x + c$

$h(1) = 5 \to a + b + c = 5$

$h(7) = 3 \to 49\,a + 7\,b + c = 3$

$-\frac{b}{2a} = 7 \to 14a + b = 0$

$a = \frac{1}{18} \qquad b = -\frac{7}{9} \qquad c = \frac{103}{18}$

$\boldsymbol{h(x) = \frac{x^2}{18} - \frac{7x}{9} + \frac{103}{18}}$

VI

32) 6 Hasen und 2 Hühner

33) Der Sohn ist $-\frac{3}{4}$ Jahre $= -9$ Monate alt. Wo ist jetzt wohl der Vater?

34) Brötchen: 0,30 €
Croissant: 1,00 €
Kuchen: 2,00 €

35)

8	30	c_1	2
a_2	12	c_2	d_2
18	20	c_3	5
a_4	b_4	14	26

$8 + 30 + c_1 + 2 = 68$
$a_2 + 12 + c_2 + d_2 = 68$
$18 + 20 + c_3 + 5 = 68$
$a_4 + b_4 + 14 + 26 = 68$
$8 + a_2 + 18 + a_4 = 68$
$30 + 12 + 20 + b_4 = 68$
$(c_1 + c_2 + c_3 + 14 = 68)$
$2 + d_2 + 5 + 26 = 68$

Nur 7 Gleichungen nötig

8	30	28	2
20	12	1	35
18	20	25	5
22	6	14	26